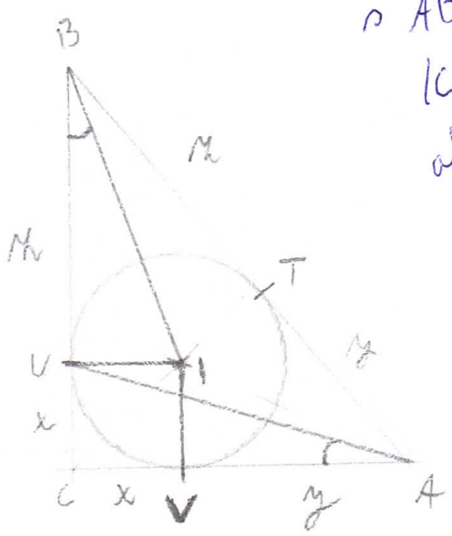
Jakub Kovalik, V.OA
GJAR, Mudroňová 20, Prešov

úloha C-1-3

V riešení tejto úlohy budeme využívať to, že ak z bodu A zostrojíme dve dotyčnice ku kružnici, pomenujme kružnicu ako k a body dotyku s kružnicou X, Y a stred kružnice I, tak platí $|AX| = |AY|$. A tiež platí, že ak zo stredu kružnice narysujeme polomer do bodu dotyku, teda úsečku IX, tak platí že $IX \perp \overrightarrow{AX}$ takisto aj $IY \perp \overrightarrow{AY}$. Načrtnime si trojuholník zo zadania. Označme dotykové body kružnice s AB ako T a s CA ako V. Ďalej vieme, že $|CU| = |CV|$, označme ako x, $|AV| = |AT|$, označme ako y, $|BT| = |BU|$, označme ako z. Vznikne nám štvorec CVIU lebo $|CU| = |CV|$ a $|\sphericalangle UCV| = |\sphericalangle CVI| = |\sphericalangle CUI| = 90°$. Teda aj $|UI| = |VI| = x$, pričom UI je polomer vpísanej kružnice.



Trojuholníky CAU a UIB majú zo zadania uhly $|\sphericalangle CAU|$ a $|\sphericalangle CBI|$, teda $|\sphericalangle UBI|$ rovnaké. Ďalej vieme že $|\sphericalangle ACU|$ a $|\sphericalangle IUB|$ sú pravé a strany CU a UI sú zhodné. Teda trojuholníky CAU a UBI sú zhodné podľa vety usu. Tým, že sú zhodné a vieme, že $|CU| = |UI|$, tak potom $|CA| = |UB|$ lebo BI a UA sú prepony. Z $|CA| = |UB|$ plynie, že $z = x + y$. Teraz nám iba treba nájsť vzťah medzi y i x. (~~S tým nám~~) na to využijeme Pytagorovu vetu.

Jakub Kovalič, V. OA
GJAR, Mudroňová 20, Prešov
Úloha C-1-3

Dostaneme: $(2x+y)^2+(x+y)^2=(2y+x)^2$

$$4x^2+4xy+y^2+x^2+2xy+y^2=4y^2+4xy+x^2$$
$$5x^2+6xy+2y^2=4y^2+4xy+x^2$$
$$4x^2+2xy=2y^2$$
$$2x^2+xy=y^2$$
$$2x^2=y^2-xy$$
$$2x^2=y(y-x)$$
$$2x(x)=y(y-x)$$

a z toho je vidno, že rovnosť bude platiť, ak $y=2x$.

Dostaneme: $2x(x)=2x(2x-x)$
$$2x(x)=2x(x)$$

Poďme teraz určiť pomer $|AC|:|BC|$

$|AC|=x+y=3x$

$|BC|=2x+y=4x$

Teda $|AC|:|BC|=3:4$